

## Isolamento

### Parete composita Multistrato

Il primo caso che andiamo ad analizzare è quello di una parete multistrato composita, costituita da uno strato continuo d'acciaio a contatto con dell'acqua alla temperatura di  $100^{\circ}\text{C}$ , e uno strato ripetitivo disomogeneo in cui si alternano due materiali, cemento ( $B_1$ ) e isolante ( $B_2$ ).

Si calcoli la potenza dissipata attraverso il rivestimento di una caldaia schematizzata dalla figura seguente:

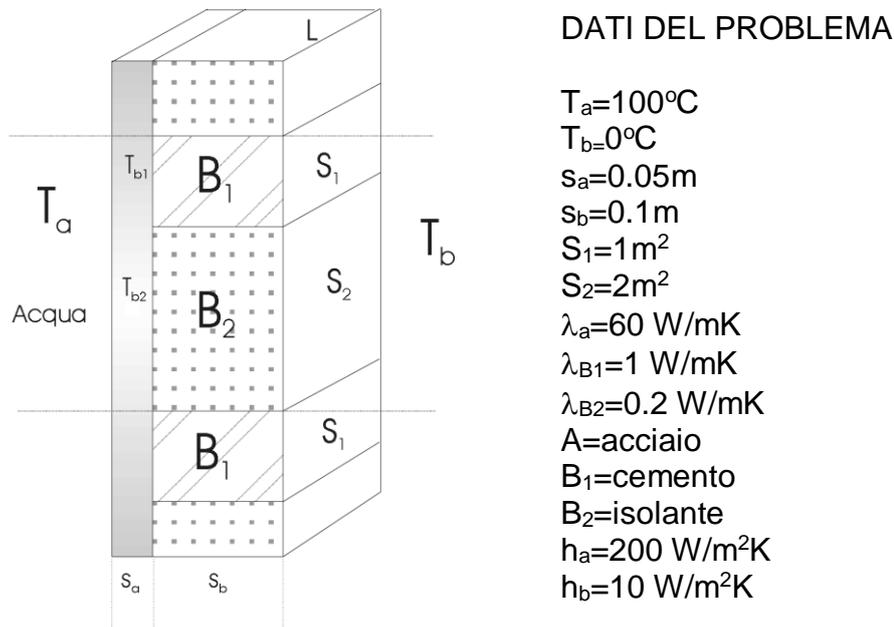


Figura 1 - Sezione della parete

Ciò che andiamo ad analizzare è quindi il blocco tra le due linee di demarcazione, ripetuto lungo la parete. Ovviamente la quota di flusso di calore è differente a seconda dello strato che attraversa, infatti in entrambi i casi il flusso attraversa prima lo strato continuo in acciaio ma successivamente si trova di fronte a due diversi materiali che presentano diversa superficie ma soprattutto diversa conducibilità  $\lambda$ .

Schematizzando il circuito elettrico equivalente al sistema:

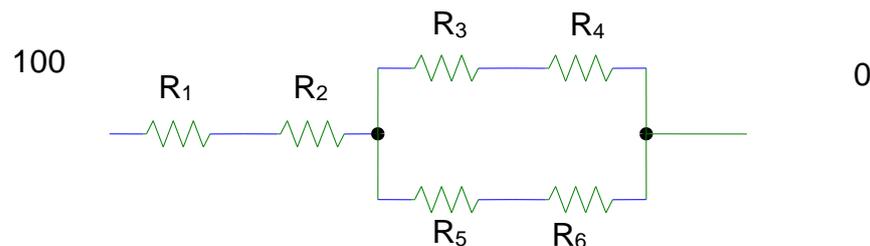


Figura 2

In questo caso le temperature di parete di cemento e isolante vengono considerate uguali.  $R_1$  è la resistenza alla convezione dell'acqua,  $R_2$  la resistenza alla conduzione della parete d'acciaio,  $R_3$  e  $R_5$  le resistenze alla conduzione delle pareti di cemento e di isolante,  $R_4$  ed  $R_6$  le resistenze alla convezione dell'aria. Da una prima osservazione posso constatare che le resistenze  $R_1$  e  $R_2$  sono trascurabili poiché lo spessore dello strato continuo in acciaio è molto piccolo, inoltre la resistenza  $R_1$  di convezione (lato acqua) è molto più piccola delle resistenze  $R_4$  ed  $R_6$  di convezione (lato aria) come posso notare dai diversi coefficienti di convezione di ciascuno dei due materiali.

Per una maggiore precisione si dovrebbe considerare il fatto che  $T_{B1} \neq T_{B2}$ , ovvero che le temperature di parete, per cemento ed isolante, non sono uguali; questo crea una seconda tipologia di circuito:

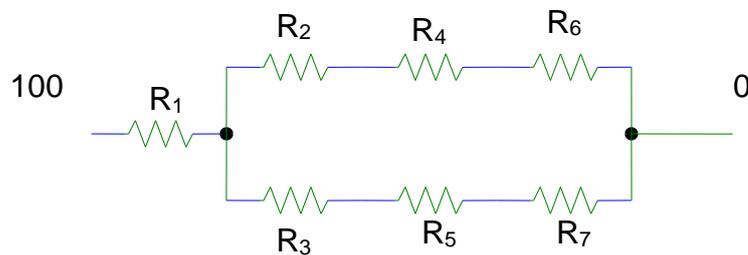


Figura 3

$R_2$  ed  $R_3$  sono ora due diverse resistenze in considerazione del fatto che, pur partendo dalla temperatura comune della parete di acciaio, le temperature di arrivo (per le pareti di cemento e isolante) sono diverse.

Continuando nello stesso senso è possibile dividere il flusso fin dall'inizio ottenendo la schematizzazione come nella Fig. 4:

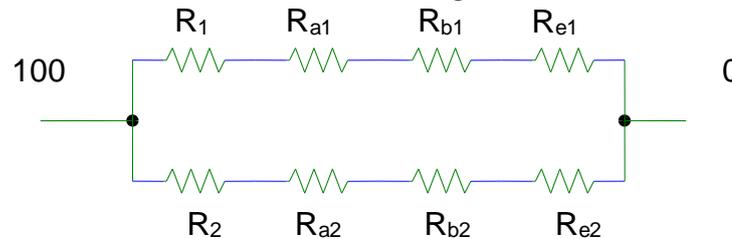


Figura 4

Anche questa rete però è solo un'approssimazione della realtà fisica, non fornisce quindi il risultato reale poiché non tiene conto, per esempio, della conduzione tra gli strati B1 e B2 che andrebbe schematizzato come in Fig. 5

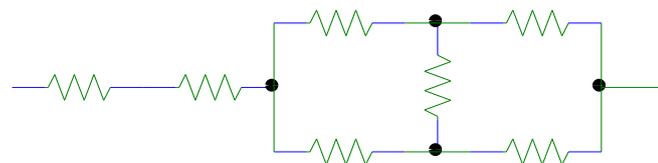


Figura 5

Il modello che offre quindi la soluzione più corretta è quello rappresentato in Fig. 2. Procediamo quindi con lo sviluppo dei calcoli tenendo presente che di tali resistenze, si sommano quelle in serie e vengono sommate le reciproche rispettive di ognuno dei due materiali di quelle in parallelo.

Calcolo:

Resistenza convezione acqua

$$R_1 = \frac{1}{h_a \cdot (S_1 + S_2)} = \frac{1}{200 \cdot 3} = 0.01666 \frac{K}{W} \quad (1)$$

Resistenza conduzione acciaio

$$R_2 = \frac{1}{\frac{\lambda_a}{s_a} \cdot (S_1 + S_2)} = \frac{1}{\frac{60}{0.05} \cdot 3} = 2.77 \cdot 10^{-4} \frac{K}{W} \quad (2)$$

Resistenza conduzione cemento

$$R_3 = \frac{1}{\frac{\lambda_{B1}}{s_b} \cdot S_1} = \frac{1}{\frac{1}{0.1} \cdot 1} = 0.1 \frac{K}{W} \quad (3)$$

Resistenza di convezione aria (su cemento)

$$R_4 = \frac{1}{h_B \cdot S_1} = \frac{1}{10 \cdot 1} = 0.1 \frac{K}{W} \quad (4)$$

Resistenza di conduzione isolante

$$R_5 = \frac{1}{\frac{\lambda_{B2}}{s_b} \cdot S_2} = \frac{1}{\frac{0.2}{0.1} \cdot 2} = 0.25 \frac{K}{W} \quad (5)$$

Resistenza di convezione aria (su isolante)

$$R_6 = \frac{1}{h_B \cdot S_2} = \frac{1}{10 \cdot 2} = 0.05 \frac{K}{W} \quad (6)$$

Ora sommo rispettivamente le resistenze di conduzione e convezione di cemento e isolante:

$$R_{34} = R_3 + R_4 = 0.1 + 0.1 = 0.20 \frac{K}{W} \quad (7)$$

$$R_{56} = R_5 + R_6 = 0.25 + 0.05 = 0.30 \frac{K}{W} \quad (8)$$

**R<sub>34</sub>** e **R<sub>56</sub>** sono tra loro in parallelo, sommo quindi le resistenze reciproche:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_{34}} + \frac{1}{R_{56}} = \frac{1}{0.2} + \frac{1}{0.3} = 8.333 \frac{W}{K} \Rightarrow R_{eq} = \frac{1}{8.333} = 0.12 \frac{K}{W} \quad (9)$$

In questo modo **R<sub>eq</sub>** è un'unica resistenza in serie a **R<sub>1</sub>** e **R<sub>2</sub>**, posso quindi sommarle per ottenere la resistenza totale:

$$R_{tot} = R_1 + R_2 + R_{eq} = 0.0166 + 2.77 \cdot 10^{-4} + 0.12 = 0.137 \frac{K}{W} \quad (10)$$

Ottenuta la resistenza totale posso calcolare la potenza dispersa:

$$Q = \frac{\Delta T}{R_{tot}} = \frac{100}{0.137} = 730.22W \quad (11)$$

Se calcolo invece le due potenze dissipate rispettivamente per il ramo del calcestruzzo e per quello dell'isolante ottengo:

$$Q_1 = \frac{T_a - T_b}{R_1 + R_{a1} + R_{B1} + R_{e1}} = \frac{100}{\frac{1}{200 \cdot 1} + \frac{0.05}{60 \cdot 1} + \frac{0.1}{1 \cdot 1} + \frac{1}{10 \cdot 1}} = 486W \quad (12)$$

$$Q_2 = \frac{T_a - T_b}{R_2 + R_{a2} + R_{B2} + R_{e2}} = \frac{100}{\frac{1}{200 \cdot 2} + \frac{0.05}{60 \cdot 2} + \frac{0.1}{0.1 \cdot 2} + \frac{1}{10 \cdot 1}} = 181W \quad (13)$$

La potenza totale dissipata **Q** è quindi pari a 667W

Attraverso questo valore è possibile vedere come calcolando la potenza dissipata in un circuito equivalente in cui i flussi sono separati, tale potenza è sottostimata.

Con i dati del problema posso anche calcolare le varie temperature di parete.

Parete calcestruzzo:

$$\Delta T = Q_1 \cdot \frac{1}{h_B \cdot S_1} = 48.6^\circ C \quad (14)$$

Parete isolante:

$$\Delta T = Q_2 \cdot \frac{1}{h_B \cdot S_2} = 9.05^\circ C \quad (15)$$

Dati che danno un'idea dell'importanza della scelta dei materiali quando si renda necessario un isolamento termico.

### Geometria cilindrica: tubo in acciaio

Il secondo caso che andiamo ad analizzare è lo studio di una geometria cilindrica, ad esempio il flusso di calore che entra ed esce dal tubo in acciaio di Fig.6.

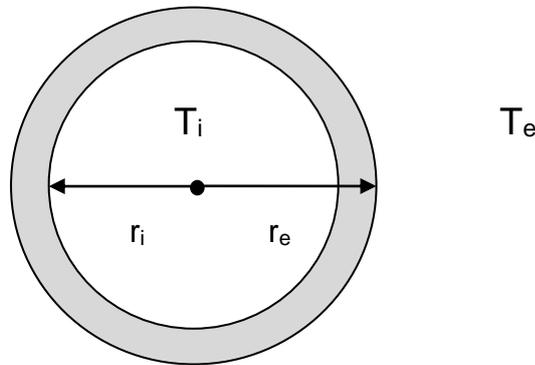


Figura 6

Dove:

$T_i$  è la temperatura interna del tubo

$T_e$  è la temperatura all' esterno del tubo, la temperatura ambiente

$r_i$  il raggio interno del tubo

$r_e$  il raggio esterno del tubo

$L$  la lunghezza del tubo

Supponendo che il fenomeno sia solo convettivo, cioè ipotizzo che non ci sia irraggiamento, questo sistema può quindi essere schematizzato come tre resistenze termiche poste in serie:



Figura 7

Noti i coefficienti di convezione interno,  $h_i$ , esterno,  $h_e$ , e la conducibilità termica del tubo,  $\lambda$ , è possibile calcolare la potenza dissipata:

$$Q = \frac{\Delta T}{R_{TOT}} = \frac{T_i - T_e}{R_{conv,i} + R_{cond,t} + R_{conv,e}} \quad (16)$$

Occorre quindi determinare i valori delle tre resistenze termiche:

Resistenza convezione interna

$$R_{conv,i} = \frac{1}{h_i \cdot S_i} \quad (17)$$

dove  $S_i$ , prendendo un tratto di tubo lungo  $L$  vale

$$S_i = \pi \cdot L \cdot d_i = 2 \cdot \pi \cdot r_i \cdot L \quad (18)$$

E quindi sostituendo

$$R_{conv,i} = \frac{1}{h_i} \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot r_i \cdot L} \quad (19)$$

Resistenza conduzione tubo

$$R_{cond} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot L} \cdot \ln \frac{r_e}{r_i} \quad (20)$$

Resistenza convezione esterna

$$R_{conv,e} = \frac{1}{h_e} \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot r_e \cdot L} \quad (21)$$

E' ora sufficiente sostituire le formule delle tre resistenze in quella della potenza dissipata  $Q$  per ottenerne il valore.

## Raggio critico

Spesso si può però avere anche la situazione in cui il tubo è rivestito da uno strato isolante con lo scopo di diminuire la dispersione di calore.

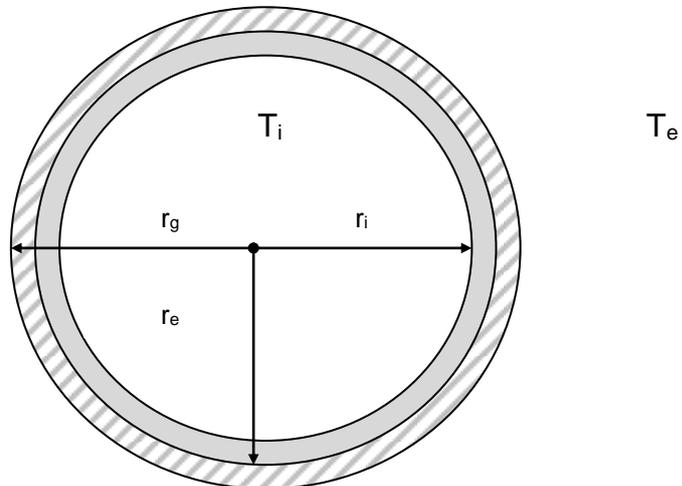


Figura 8

Ora il sistema sarà descritto da un modello che prevede 4 resistenze termiche poste sempre in serie:



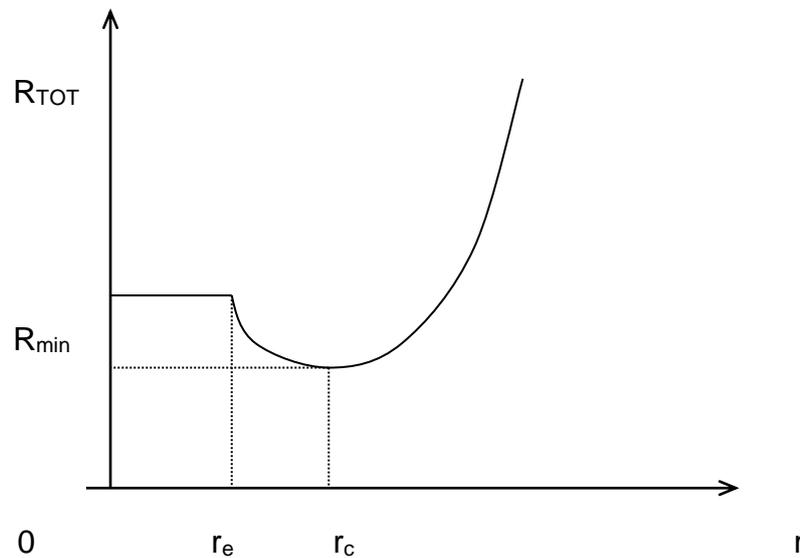
Figura 9

Quindi la potenza termica dispersa nell'ambiente sarà ora data da

$$Q = \frac{\Delta T}{R_{TOT}} = \frac{T_i - T_e}{\frac{1}{r_i \cdot 2 \cdot \pi \cdot L \cdot h_i} + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot L \cdot \lambda} \cdot \ln\left(\frac{r_e}{r_i}\right) + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot L \cdot \lambda_g} \cdot \ln\left(\frac{r_g}{r_e}\right) + \frac{1}{r_g \cdot 2 \cdot \pi \cdot L \cdot h_e}} \quad (22)$$

Dalla formula possiamo notare che il termine  $r_g$  a numeratore nella formula per il calcolo della resistenza di conduzione dell'isolante, fa sì che il suo crescere faccia aumentare la resistenza termica, ma  $r_g$  compare anche a denominatore nel calcolo della resistenza di convezione esterna. In questo caso provoca l'aumento non della resistenza ma della superficie disperdente.

Esiste quindi un raggio definito raggio critico  $r_c$ , in questo caso dello strato isolante, che porta a massimizzare l'effetto di dispersione del calore. Per comprendere il fenomeno esiste un grafico che mette in relazione raggio critico e resistenza termica.



Al crescere di  $r_g$  la resistenza inizialmente decresce fino a raggiungere il valore del raggio critico dell'isolante,  $r_c$ , in cui si ha la minima resistenza termica e quindi la massima dispersione di calore, dopodichè la resistenza torna a crescere e torna ad avere un effetto isolante.

Ad esempio usando una guaina sottile con valori di conducibilità termica non troppo piccoli si può ottenere tale peggioramento, cioè che la potenza termica dispersa dopo aver aggiunto lo strato isolante attorno al tubo, sia maggiore di quella precedente. Usando invece isolanti molto spessi si riesce ad oltrepassare il raggio critico e la conseguente dispersione di calore.

## Coefficiente di convezione

L'approccio al calcolo del coefficiente di convezione è simile a quello per il calcolo del fattore d'attrito,  $\xi$ , all'interno dei condotti. Ricaviamo quest'ultimo valore nel diagramma di Moody, che in funzione di due numeri puri adimensionali, numero di Reynolds e scabrezza relativa, ricava il numero puro del coefficiente d'attrito.

$$\xi = f\left(R_e, \frac{\varepsilon}{D}\right) \quad (23)$$

## Teorema di Buckingham:

Tale teorema dice che il numero di parametri adimensionali necessario a descrivere compiutamente un fenomeno fisico è dato dal numero di variabili fisiche del problema diminuito del numero di relazioni

che le legano. L'operazione eseguita è costituita da una serie di analisi di un problema fondate su operazioni coinvolgenti grandezze rappresentative del problema stesso, le quali vengono manipolate in modo da essere rese adimensionali (ossia dei numeri puri). Nelle applicazioni sono dunque nati numerosi gruppi adimensionali cioè le grandezze numeriche che semplificano la descrizione di base dei fenomeni naturali o artificiali. In termocinetica è possibile determinare il coefficiente di convezione attraverso il numero di Nusselt che è funzione dei numeri di Prandtl Reynolds, Grashof e del posizionatore o fattore di forma.

$$N_u = f\left(R_e, G_r, P_r, \frac{\vec{x}}{D}\right) \quad (24)$$

• **numero di Reynolds**  $Re = \frac{w \cdot D \cdot \rho}{\mu} = \frac{w \cdot D}{\nu}$  (25)

dove:  $w$  è la velocità media del fluido  
 $D$  è la dimensione caratteristica  
 $\nu$  è la viscosità cinematica  
 $\mu$  è la viscosità dinamica

Il numero di Reynolds è preso in esame in caso di **convezione forzata**.

• **numero di Prandtl**  $Pr = \frac{\nu}{\alpha^2}$  (26)

dove:  $\alpha^2$  è la diffusività termica del fluido in esame  
 $\nu$  è la viscosità cinematica

$$\alpha^2 = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p} \quad (27)$$

dove:  $\lambda$  è la conducibilità del fluido  
 $\rho$  è la densità del fluido  
 $c_p$  è la capacità termica

Sostituendo nella formula precedente ottengo:

$$Pr = \frac{\nu \cdot \rho \cdot c_p}{\lambda} \quad (28)$$

Il numero di Prandtl è quindi il rapporto tra attrito e scambio termico, tra la capacità di trasferire forze tangenziali e longitudinali (forze viscosi) e la capacità di trasferire calore.

• **numero di Grashof** 
$$Gr = \frac{g \cdot \beta \cdot L^3 \cdot (T_p - T_\infty)}{\nu^2} \quad (29)$$

dove:  $g$  è l'accelerazione di gravità  
 $\beta$  è il coefficiente di dilatazione termica  
 $T_p$  è la temperatura della parete  
 $T_\infty$  è la temperatura asintotica  
 $\nu$  è la viscosità cinematica  
 $L$  è la dimensione caratteristica

Il numero di Grashof rappresenta la vivacità del moto di galleggiamento. E' il rapporto tra il motore (galleggiamento) e un freno (viscosità). Il motore costituito dalle forze di galleggiamento è rappresentato dal seguente termine:

$$g \cdot \beta \cdot (T_p - T_\infty)$$

Il numero di Grashof è preso in esame in caso di **convezione naturale**.

• **posizionatore o fattore di forma** 
$$\frac{\bar{x}}{L} \quad (30)$$

dove:  $\bar{x}$  è l'ascissa lungo l'asse del tubo  
 $L$  è la dimensione caratteristica

Otteniamo quindi il coefficiente di convezione adimensionalizzato che chiamiamo **numero di Nusselt**, cioè:

$$Nu = \frac{h \cdot L}{\lambda} \quad (31)$$

dove:  $h$  è il coefficiente di convezione  
 $L$  è la dimensione caratteristica  
 $\lambda$  è la conducibilità del fluido

In base al Teorema di Buckingham, **Nu** sarà funzione dei quattro numeri puri precedentemente esposti:

$$Nu = \frac{h \cdot L}{\lambda_{\text{fluido}}} = f\left(\text{Re}, Gr, \text{Pr}, \frac{\bar{x}}{L}\right) \quad (32)$$

dove  $f$  rappresenta un *legame funzionale*.

Dire che esiste un legame funzionale equivale a dire che esiste un'unica "formula" algebrica con valori numerici fissati e invarianti che lega funzionalmente i 4 input all'unico output.

Ad ogni problema fisico esiste una determinata soluzione.

Alcune di queste formule sono note; ad esempio per l'acqua che scorre dentro un tubo la formula la cui formula viene chiamata di **Dittus-Boelter** e dice che:

$$Nu = 0.023 \cdot Re^{0.8} \cdot Pr^{0.4} \quad (33)$$

In tale caso non c'è dipendenza dal posizionatore perché si considera il regime sviluppato, cioè quando la regione d'ingresso è terminata, e non c'è dipendenza dal numero di Grashof perché siamo in convezione forzata.

## Appendice : Tabelle

Sezione del condotto		Condizioni al contorno	
		Flusso di calore alla parete = cost	Temperatura della parete = cost
Circolare		4.36	3.66
Quadrata $a = b$		3.63	2.98
Rettangolare	$a = 1.4 b$	3.73	3.08
	$a = 2 b$	4.11	3.40
	$a = 3 b$	4.79	3.96
	$a = 4 b$	5.35	4.44
	$a = 8 b$	6.49	5.60
	$a = \infty$	8.24	7.54
$a = \infty$ con una superficie isolata		5.38	4.86
Triangolare $a = b = c$		3.11	2.47

Tabella 1 – Valori del numero di Nusselt per moto laminare e profili completamente sviluppati.

Campo di validita' (Re)	Regime			Co stante In parete		Nu = C·Re <sup>a</sup> ·Pr <sup>c</sup>			Autori	Note
	Ingr. Dinamico	Ingr. Termico	Sviluppato	T	Q	C	a	c		
< 2300						$0.289(D/X)^{1/2}$	0.5	0.33	Elser	L < 20 D
< 2300						$1.86(D/X)^{1/3}$	0.33	0.33	Sieder e Tate	X > 20 D
< 2300						$0.664(D/X)^{1/2}$	0.5	0.33	Pohlhaunsn	
3000 – 30000						0.0033	1	0.37	Böhm	
2700 – 7000						$0.01(D/X)^{0.37}$	1	0.37	Giulianini e altri	1.2 D < X X < 20 D
> 10000						$0.036(D/X)^{1/18}$	0.8	0.33	Nusselt	
> 10000						$0.032(D/X)^{1/20}$	0.8	0.37	Kraussold	Liquido Riscaldato
> 10000						$0.032(D/X)^{1/20}$	0.8	0.3	Kraussold	Liquido Raffreddato
> 10000						$0.183(D/X)^{1/3}$	7/12	0.33	Elser	Teorico
> 10000						0.023	0.8	0.4	Dittus e Boelter	Fluido Riscaldato
> 10000						0.023	0.8	0.3	Dittus e Boelter	Fluido raffreddato
> 10000						0.027	0.8	0.33	Sieder e Tate	Per prodotti Petroliferi

12000 – 220000						$0.02(D_i/D_e)^{0.53}$	0.8	0.33	Monrad e Pelton	Aria o acqua sez. anulare sup. esterna isolata
----------------	--	--	--	--	--	------------------------	-----	------	-----------------	--

Tabella 2 – Formule sperimentali per il calcolo del numero di Nusselt: convezione forzata.

Situazione geometrica	Campo di validità (Ra)	Nu=C·Gr <sup>b</sup> ·Pr <sup>c</sup>				Autori	Note
		C					
Superficie cilindrica orizzontale	< 10 <sup>-5</sup>	0.4				McAdams	Nu e Gr calcolati in funzione del diametro D
	10 <sup>3</sup> - 10 <sup>9</sup>	0.53		.25	.25		
	10 <sup>9</sup> - 10 <sup>12</sup>	0.13		.33	.33		
Superficie piana o cilindrica verticale	10 <sup>3</sup> - 10 <sup>9</sup>	0.59		.25	.25	McAdams	Nu e Gr calcolati in funzione della estensione verticale L
	10 <sup>9</sup> - 10 <sup>12</sup>	0.13		.33	.33		
Superficie piana orizzontale	10 <sup>5</sup> – 2·10 <sup>7</sup>	0.54		.25	.25	Fishenden e Saunders	Flusso di calore verso l'alto
	2·10 <sup>7</sup> – 3·10 <sup>10</sup>	0.14		.33	.33		
Superficie piana orizzontale quadrata di lato L	10 <sup>5</sup> – 2·10 <sup>7</sup>	0.25		.25	.25		Flusso di calore verso il basso
Sfera	10 <sup>3</sup> - 10 <sup>7</sup>	0.49		.25	.25	Bromham e Mayhew	
Strato verticale di altezza H e spessore L: una parete verticale più calda dell'altra	< 2000 Pr	1				Jakob	Nu e Gr calcolati in funzione di L. Relazioni valide per l'aria
	(2·10 <sup>4</sup> – 2·10 <sup>5</sup> ) Pr	0.18(H/L) <sup>-1/9</sup>		.25			
	(2·10 <sup>2</sup> – 11·10 <sup>6</sup> ) Pr	0.065(H/L) <sup>-1/9</sup>		.33			
	< 10 <sup>3</sup>	1				Emery e Chu	Nu e Gr calcolati in funzione di L. Relazioni valide per i liquidi, con 3 < Pr < 30000
	10 <sup>3</sup> - 10 <sup>7</sup>	0.28(H/L) <sup>-1/4</sup>		.25	.25		

Tabella 3- Formule sperimentali per il calcolo di Nusselt: convezione forzata.

Situazione geometrica	Campo di Validità	Nu = C·Re <sup>a</sup> ·Gr <sup>b</sup> ·Pr <sup>c</sup>				Autori	Note
		C					
Condotto verticale con sezione circolare L/D=20	Re > 1600	0.525		0.25	0.25	Watzinger e Johnson	Acqua che scende Raffreddandosi
	1600 < Re < 4600	0.255	.07	0.25	0.37		
Condotto verticale con sezione circolare L/D=50	10 <sup>3</sup> < Re < 10 <sup>5</sup>	0.032·(D/X) <sup>0.05</sup>	0.8		0.37	Kirschbaum	Re deve essere Modificato con l'aggiunta di un termine correttivo

Tabella 4- Formule sperimentali per il calcolo del numero di Nusselt: convezione mista.